# *Capitolo 1: gli insiemi*

Per iniziare, diciamo subito che, come puoi capire dal nome stesso, ***un insieme è una raccolta di oggetti***, ma fai molta attenzione, perché ***non tutte** **le raccolte di oggetti sono insiemi***.

***In pratica:*** gli oggetti si indicano con lettere stampato minuscole. Al contrario, gli insiemi di oggetti si indicano con lettere stampato maiuscole ($a$ è un oggetto, $A$ è un insieme).

Una volta specificato in quali oggetti stiamo parlando, ***definire un insieme significa decidere quali oggetti fanno parte dell'insieme e quali, invece, no***.

***In pratica: per definire un insieme, bisogna fornire una regola precisa, che specifichi quale caratteristica un oggetto deve avere per stare nell'insieme.***

Se un oggetto rispetta la regola, cioè possiede quella caratteristica, quell'oggetto sta nell'insieme; se invece non rispetta la regola, cioè non possiede quella caratteristica, allora quell'oggetto non sta nell'insieme. La cosa importante è che ***la regola si possa controllare per ogni oggetto***; invece, ***non ha nessuna importanza quanti oggetti rispetteranno la regola***. In altre parole se, ***preso un oggetto a caso, è possibile decidere se rispetta la regola, allora quella regola definisce un insieme***, altrimenti quella regola non definisce un insieme.

Per esempio, la regola "*le pietre che pesano più di 100 g*", definisce un insieme di pietre? Sì, perché si può decidere se una pietra, presa a caso, pesa più di 100 g, basta pesarla: se pesa più di 100 g, quella pietra sta nell'insieme, altrimenti non sta nell'insieme. Ora consideriamo "*i gatti più grossi di San Marino*". Questa regola definisce un insieme di gatti? Si può decidere se un gatto preso a caso è uno dei più grossi di San Marino? No, perché non è precisato ***cosa significa essere "grosso"***. Significa pesare più di 3 Kg? O forse più di 4 Kg? Oppure essere più lungo di 40 cm? Siccome non è chiaro, se vedi un gatto per strada non ti è possibile decidere se rispetta o no la regola, ***perché è troppo vaga***. Allora la regola "*i gatti più grossi di San Marino*" ***non definisce*** un insieme.

***In pratica***: per sveltire i discorsi, spesso diremo che un insieme è ***più grande*** di un altro, per intendere che ***ha più elementi*** dell'altro. Naturalmente, quando diremo che un insieme è ***più piccolo*** di un altro, intenderemo che ***ha meno elementi*** dell'altro. Però fai bene attenzione …

***In pratica***: un insieme è ***uguale*** ad un altro se i due hanno ***gli stessi elementi*** (proprio ***gli stessi*** elementi, ***non** **lo stesso numero*** di elementi!).

***In pratica***: in qualsiasi insieme, conta solo quali elementi ne fanno parte. Invece, ***l'ordine in cui gli elementi sono scritti non ha nessuna importanza***.

## *Relazione di appartenenza*

Tutti gli oggetti che rispettano la regola che definisce l'insieme, si dice che ***appartengono*** all'insieme, o che ***sono elementi*** dell'insieme. Tutti quelli che, invece, non rispettano la regola che definisce l'insieme, si dice che ***non appartengono*** all'insieme, o che ***non sono elementi*** dell'insieme. Se l'oggetto di nome $x$ appartiene all'insieme $A$, cioè è un elemento di $A$, si scrive, in linguaggio simbolico, che $x \in A$ (si legge *x appartiene* ad $A$). Se invece l'oggetto $x$ non appartiene all'insieme $A$, cioè non è un elemento di $A$, si scrive, in linguaggio simbolico, che $x \notin A$ (si legge *x non appartiene* ad $A$). In matematica, la barra di traverso su un simbolo indica la negazione di quel simbolo, cioè che quel simbolo non è vero. Quindi $\notin$

significa: non è vero che appartiene, cioè ***non appartiene***. Il simbolo $\neq$ significa: non è vero che è uguale, cioè ***è diverso***.

***Fai molta attenzione***: la relazione di appartenenza vale ***fra un oggetto ed un insieme***, non fra due oggetti, né fra due insiemi, né fra un insieme ed un oggetto. ***Non ha senso*** dire che un elemento appartiene ad un altro elemento, né che un insieme appartiene ad un altro insieme, né che un insieme appartiene ad un elemento. Se ci pensi, la cosa è ovvia: come fa un insieme, che è un raggruppamento di oggetti, ad appartenere ad un oggetto solo?
Come fa un oggetto ad appartenere ad un altro oggetto?

***In pratica:*** le seguenti scritture non hanno senso: $A \in a \quad A \in B \quad a \in b$.

Probabilmente, scrivendo $A \in B$, vorresti dire che tutti gli elementi di *A* sono anche elementi di *B*, ma ***la relazione di appartenenza parla di un singolo elemento***, non di gruppi di elementi (cioè di altri insiemi). Se si vuole esprimere che tutti gli elementi di *A* sono anche elementi di *B*, si deve ricorrere ad un'altra relazione, quella di sottoinsieme, che vedremo più avanti**.**

## *Insiemi vuoti, finiti, infiniti*

***Definizione:*** un insieme che non ha elementi si dice ***vuoto***. Un insieme vuoto si può indicare con questo simbolo: $\varnothing$.

***Definizione:*** un insieme che contiene un certo numero di elementi, si dice ***finito***.

***Definizione:*** un insieme che contiene un numero di elementi senza fine, si dice ***infinito***.

Per esempio "le note musicali" definisce un insieme finito (contiene 7 elementi). "I numeri interi compresi fra 3 e 10" definisce un insieme finito (contiene 8 elementi). "I numeri interi pari" definisce un insieme infinito, perché puoi scriverne quanti ne vuoi, ma potrai sempre mettercene un altro semplicemente prendendo l'ultimo elemento inserito e aggiungendogli 2.

***Fai molta attenzione***: può capitare che alcune regole non siano rispettate ***da nessun oggetto***, ma sia lo stesso possibile determinare, per ogni oggetto, se rispetta la regola oppure no. In questo caso, come abbiamo detto sopra, ***la regola definisce un insieme, solo che l'insieme è vuoto***. Ad esempio, anche se ti sembra strano, la regola "*i gatti con sette zampe*" ***definisce un insieme***. Infatti, sei perfettamente in grado di decidere, preso un gatto qualsiasi (senza tirarlo per la coda), se ha sette zampe oppure no, basta contarle. Naturalmente, non esistono gatti con sette zampe, ma ***questo significa solamente*** che nessun gatto apparterrà all'insieme, cioè ***che l'insieme è vuoto***.

***In pratica:*** se si è stabilito che una certa regola definisce un insieme, ha senso chiedersi se questo insieme è vuoto, finito, o infinito. Invece, ***se la regola non definisce un insieme, non ha senso chiedersi se si parla di un insieme vuoto, finito, o infinito***, visto che non è nemmeno un insieme!

***Fai molta attenzione***: una volta che hai deciso che un certo oggetto appartiene ad un insieme, vi appartiene e basta. Scrivere più di una volta un elemento fa pensare che questo conti di più degli altri, ma non è così. ***Nessun elemento conta più degli altri, tanto da meritare di essere scritto più volte!*** Per esempio, la regola "*le lettere della parola 'pozzo'*", definisce un insieme finito di 3 elementi distinti, che sono *p*, *o*, *z* e **non** un insieme di 5 elementi *p*, *o*, *z*, *z*, *o*!!

***In pratica:* nessun elemento, di nessun insieme, deve mai essere ripetuto, cioè riscritto due o più volte.**

***Fai attenzione:*** quando si dice che nessun elemento deve essere ripetuto, si intende parlare dell'intero elemento, ***non ci si riferisce alle eventuali parti che lo compongono, che invece possono anche essere ripetute***. Per esempio, "*i numeri pari minori di 14*" contiene gli elementi 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12. Questi elementi sono tutti diversi! È vero che 10 è costituito dalle cifre 1 e 0 e che le stai ripetendo, ma le "*cifre*" **non sono** gli oggetti che ci interessano: la regola parla dei numeri interi, quindi i "*numeri interi*" sono gli oggetti che ci interessano. Allora, scrivendo 10, stai scrivendo un elemento a sé, non una sequenza di altri due elementi.

## *Rappresentazione di un insieme*

Un insieme $A$, per esempio quello definito dalla regola "*le lettere della parola soffio*", può essere rappresentato in tre modi:

1. ***Per elencazione***: si elencano semplicemente tutti gli elementi dell'insieme, separati da un ';' o da ',' o ***da qualsiasi segno che non si possa confondere con un elemento o parte di un elemento*** (Morale: se gli elementi sono numeri con la virgola, non separarli con ',' altrimenti non capirai più se comincia un nuovo elemento, oppure è la virgola di quello precedente!). Se vogliamo rappresentare $A$ per elencazione, scriveremo:

   $A$ = {s;o;f;i}

   che si legge: $A$ è l'insieme di elementi *s, o, f, i*

   ***Fai attenzione:*** questa rappresentazione va bene quando l'insieme consiste di pochi elementi. Allora per vedere se un oggetto ne fa parte, si controlla velocemente se è in elenco. Però se l'insieme è molto grande, o addirittura infinito, ***questa rappresentazione non è utilizzabile***!

   ***Fai attenzione:*** se $A$ è vuoto, la sua rappresentazione per elencazione sarà $A = \{\}$

2. ***Per caratteristica***: la caratteristica non è altro che ***la regola che definisce l'insieme***. La regola, infatti, è proprio quella caratteristica particolare che un oggetto deve avere per appartenere all'insieme. Se l'oggetto ce l'ha, è un elemento dell'insieme, se non ce l'ha, non è un elemento dell'insieme. Se vogliamo rappresentare $A$ per caratteristica, scriveremo:

   $A$ = {$x$ | $x$ è una lettera della parola "soffio"}

   che si legge: $A$ è l'insieme degli $x$ tale che $x$ è una lettera della parola "soffio".

   Che cosa vuole dire? ***x è un nome*** che indica un oggetto, ma ***non indica un oggetto preciso*** e allo stesso tempo ***non indica tutti gli oggetti insieme.*** $x$ è un nome che indica ***un solo*** oggetto (alla volta), soltanto che ***ancora non abbiamo deciso quale***. Per capire cosa voglio dire, immagina che in classe io dica: "Angelo vada a prendere un gessetto", perché voglio che precisamente Angelo vada a prendere il gessetto, e non altri. Angelo è un nome che indica con precisione uno degli alunni, perciò se chiedessi *quale alunno* è andato a prendere il gessetto, tu risponderesti Angelo, senza nessuna difficoltà. Però io potrei anche dire "***un alunno*** vada a prendere il gessetto", perché mi interessa avere il gessetto, ***ma non mi interessa quale alunno andrà a prenderlo;*** siccome ancora non so chi effettivamente ci andrà, ***devo usare un nome generico, che può andar bene per qualunque alunno, ma che non si riferisce con precisione a nessuno degli alunni*** (altrimenti avrei detto Angelo, o Monica, eccetera)***, e nemmeno si riferisce a tutti gli alunni*** (altrimenti si alzerebbero tutti insieme per andare fuori, ma io voglio che ci vada ***solo uno***). A questo punto, se chiedessi di nuovo *quale alunno* è andato a prendere il gessetto, tu avresti maggiore difficoltà a rispondere? No, la risposta è sempre precisa e unica, solo che dipende da chi effettivamente si è alzato: se si è alzato Francesco, la risposta sarà Francesco, se si è alzata Sara, la risposta sarà Sara, e così via. Il punto è che tu adesso sai chi si è alzato, ma io non sapevo chi lo avrebbe fatto quando ho chiesto di uscire. Quindi, in questo esempio, è un po' come se io avessi detto "$x$ vada a prendere il gessetto": se si alza Sara, allora $x$ indica Sara, se si alza Andrea, allora $x$ indica Andrea, ma $x$ ***non* indica contemporaneamente** sia Sara che Andrea, indica solo uno dei due, ***una volta che si è deciso quale***. Nell'esempio dell'insieme $A$, $x$ indica un oggetto qualsiasi (che in questo caso sono tutte le lettere dell'alfabeto): se $x$ indica '*s*', allora $x$ appartiene all'insieme (cioè $s$ appartiene all'insieme), se $x$ indica '*a*', allora $x$ non appartiene all'insieme (cioè $a$ non appartiene all'insieme), se $x$ indica '*g*', allora $x$ non appartiene all'insieme, se $x$ indica '*f*', allora $x$ appartiene all'insieme, e così via. In pratica, come nel caso dell'alunno, $x$ indica una qualsiasi lettera dell'alfabeto, ma io in più specifico, ***con la regola***, che questa "lettera qualunque" deve essere una lettera che compare nella parola "soffio". Solo quando $x$ indica '*s*', $x$ indica '*o*', $x$ indica '*f*' ed $x$ indica '*i*' la regola è soddisfatta, in tutti gli altri casi, l'oggetto indicato dal nome $x$ non appartiene all'insieme $A$.

***Perché ci mettiamo a fare questa cosa complicata?*** Introdurre un nome generico per indicare un elemento qualsiasi… perché non è meglio chiamarli direttamente col loro nome? Il fatto è, semplicemente, che vogliamo dare una regola breve che sia controllabile ***su ogni oggetto***, uno per uno, ***indipendentemente dal suo nome proprio***, perché la caratteristica che ci interessa identificare, ***non ha niente a che fare col nome dell'oggetto!*** Pensa di dover controllare se un gatto pesa più di 3 Kg: ***cosa ti importa*** se si chiama Fufi, Leo, o Ludmillo? Inoltre, ripensa agli esempi di prima: se non avessi usato il nome generico "alunno" (o un altro equivalente), cosa avrei dovuto dire? Una cosa del genere: "Marco, oppure Nicola, oppure Valentina, oppure Sara, oppure Elisa, oppure…. vada a prendere un gessetto". Ti accorgi subito che ***così non si finisce più*** (e pensa se invece che di una ventina di alunni parlassimo degli infiniti numeri interi).

Tieni presente che la caratteristica (cioè la regola che definisce l'insieme), ***non si controlla affatto sull'insieme, ma su ogni oggetto: uno alla volta***. Infatti, se ci pensi bene, per decidere se un oggetto sta nell'insieme, devi controllare se ***quell'oggetto*** rispetta la regola, cioè se ***quell'oggetto*** ha la caratteristica richiesta, ma ***non importa assolutamente cosa fanno gli altri oggetti***, ognuno si decide per sé! Allora, quando devi dare ***la regola generale, devi specificarla al singolare***, non al plurale, perché deve essere controllata su un oggetto alla volta, non sull'intero insieme (che, tra l'altro, ancora non c'è, visto che stiamo ancora decidendo quali elementi ci devono andare!). L'errore di dare una caratteristica che riguarda l'insieme e non gli elementi, è abbastanza comune. Per esempio, per definire un insieme vuoto nella rappresentazione per caratteristica, molti fanno così: $A = \{x \mid x$ è vuoto$\}$. Questo è un brutto errore, ***perché x non è un insieme***, ma è un oggetto. Ha senso dire che l'insieme dei gatti con sette zampe è vuoto, ma che senso ha dire che ***un gatto*** è vuoto? Ha senso dire che l'insieme dei voti maggiori di "10" è vuoto, ma che senso ha dire che "7" è vuoto? Gli oggetti hanno caratteristiche, ***solo i loro raggruppamenti (insiemi) possono essere vuoti o non vuoti***.

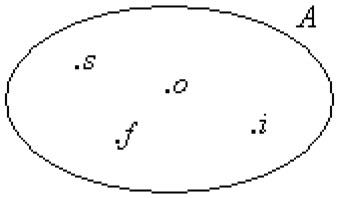
A questo proposito, meglio chiarire che se un insieme non è vuoto, ***non si dice che è "pieno"***, si dice che ***è "non vuoto".*** È proprio come per il salvadanaio: per il fatto che non è vuoto non vuol dire (purtroppo) che è pieno!

***Fai attenzione:*** se $A$ è vuoto, la sua rappresentazione per caratteristica sarà una regola precisa, ***ma impossibile da soddisfare***. Per esempio A = {x | x è un numero intero minore di 10 e maggiore di 12}

***Fai attenzione:*** quando si scrive A = {*x* | *x* è una lettera della parola "*soffio*"} si intende che *x* è un elemento di A se indica **una qualsiasi delle** lettere della parola "*soffio*", ma ***ASSOLUTAMENTE NON che l'insieme A contiene solo una delle lettere presa a caso***!

Esempio: A = {'s','o','f','i'} è l'insieme indicato dalla regola sopra. Invece ***NESSUNO*** degli insiemi A = {'s'}, oppure A = {'o'}, oppure A = {'f'}, oppure A = {'i'} è l'insieme definito dalla regola sopra!

3. ***Per diagramma di Eulero-Venn***: si elencano semplicemente tutti gli elementi dell'insieme, preceduti da un . e racchiusi in un ovale che indica l'insieme.




La rappresentazione per diagramma di Eulero-Venn, detta anche ***rappresentazione grafica***, è molto utile per rappresentare visivamente ***le relazioni fra più insiemi***, più che per rappresentare un singolo insieme. Capirai meglio cosa voglio dire più sotto, quando vedremo i sottoinsiemi e le operazioni insiemistiche.

***Fai attenzione:*** se *A* è vuoto, la sua rappresentazione per diagramma sarà un ovale vuoto.

## *Sottoinsiemi e soprainsiemi*

Consideriamo ***due insiemi***, che chiamiamo *A* e *B*.

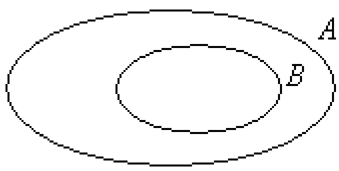
***Definizione***: se ***tutti*** gli elementi di B sono anche elementi di A, si dice che ***B è un sottoinsieme di A*** (o anche che ***B è incluso in A***) e in linguaggio simbolico si scrive $B \subset A$. Inoltre, si può dire anche che ***A è un soprainsieme di B*** (o anche che ***A include B***) e in linguaggio simbolico si scrive $A \supset B$.

***Fai molta attenzione***: la relazione di sottoinsieme vale ***fra due insiemi***, non fra un oggetto ed un insieme, o fra due oggetti. ***Non ha senso*** dire che un elemento è sottoinsieme di un insieme, o, peggio ancora, che un insieme è sottoinsieme di un elemento.

***In pratica***, le seguenti scritture sono prive di senso: $A \subset a$ $\;a \subset A$ $\;a \subset b$.

Probabilmente, scrivendo $a \subset A$ vorresti dire che l'oggetto *a* è un elemento dello insieme *A*, ma questo si esprime simbolicamente attraverso l'appartenenza $a \in A$, ***non è una relazione di sottoinsieme.***

Nella rappresentazione grafica, si riconosce facilmente la relazione di sottoinsieme / soprainsieme, perché l'ovale del sottoinsieme è tutto dentro l'ovale del suo soprainsieme. Nella figura sotto non rappresentiamo gli elementi, perché comunque essi siano (cioè indipendentemente da cosa contengono *A* e *B*), il disegno degli ovali sarà fatto così e il disegno degli ovali è la sola cosa che ci interessa per evidenziare ***la relazione fra gli insiemi***.



***Fai molta attenzione:*** se un insieme è uguale ad un altro, è anche un suo sottoinsieme (infatti tutti i suoi elementi sono anche elementi dell'altro insieme), quindi ***qualsiasi insieme si può considerare un sottoinsieme di sé stesso***. Inoltre, un insieme vuoto si considera un sottoinsieme di qualunque insieme. Se non riesci a farti una ragione del perché, non ti preoccupare: dipende semplicemente dal fatto che altrimenti tutta la matematica perderebbe le fondamenta, ma il discorso si chiarisce solo per chi fa matematica all'università, perciò non ti chiederò mai una spiegazione di questo fatto. ***Però che è così te lo devi ricordare!*** In base a queste osservazioni, possiamo dire che…

***In pratica:*** ***qualunque insieme ha sempre almeno due sottoinsiemi, che sono l'insieme vuoto e l'insieme stesso***. Questi due insiemi si dicono anche ***sottoinsiemi impropri*** dell'insieme. Tutti gli altri sottoinsiemi, invece, si dicono ***sottoinsiemi propri***.

***In pratica:*** quando due insiemi sono espressi per elencazione, per vedere se uno è sottoinsieme dell'altro si prende il primo elemento dell'insieme più piccolo (ricordati che il più piccolo è quello che ha meno elementi) e si controlla se c'è fra gli elementi del più grande. Se c'è, si prende il successivo elemento nell'elenco dell'insieme più piccolo e di nuovo si controlla se c'è nell'elenco del più grande. Si va avanti così per tutti gli elementi dell'insieme più piccolo: se anche l'ultimo nell'elenco dell'insieme più piccolo compare nell'elenco del più grande, l'insieme più piccolo è un sottoinsieme del più grande. Se, invece, in qualunque momento trovo un elemento che non è presente nell'insieme più grande, i due insiemi non sono uno sottoinsieme dell'altro.

***In pratica:*** se gli insiemi sono rappresentati in modi diversi ed hai difficoltà a capire se uno è sottoinsieme dell'altro, trasforma tutte le rappresentazioni in elencazioni e poi usa la tecnica descritta sopra.

## *Operazioni fra insiemi*

Proprio come le operazioni aritmetiche prendono due numeri ed hanno per risultato un altro numero, le operazioni insiemistiche ***prendono due insiemi ed hanno per risultato un altro insieme***. Vediamo adesso, una per una, quali sono le operazioni insiemistiche.

- ***Unione:*** il risultato dell'unione di due insiemi *A* e *B*, è un insieme che ha per elementi ***tutti gli elementi di A, con l'aggiunta di tutti gli elementi di B***. L'unione di *A* e *B* si rappresenta simbolicamente così: $A \cup B$. Osserva che l'unione fra insiemi assomiglia all'addizione fra numeri: il risultato è un solo "mucchio", che contiene tutti gli oggetti dei due "mucchi" precedenti.
  ***Fai attenzione***: gli elementi di *A* che sono anche elementi di *B* si scrivono una volta sola nella unione, perché l'unione è un insieme ed in nessun insieme si scrivono elementi duplicati.

  ***In pratica:*** per determinare l'unione di due insiemi rappresentati per elencazione, scrivi ***prima*** tutti gli elementi del primo insieme e ***di seguito*** tutti gli elementi del secondo insieme, ma ***salta quelli che hai già scritto***.

  Esempio: dato $A = \{1,3,5,6\}$ e $B = \{1,2,4,5\}$, allora $A \cup B = \{1,3,5,6,2,4\}$

  ***Osserva***: visto che l'ordine degli elementi non ha nessuna importanza, ***non ti conviene perdere tempo a riordinare i numeri***, per scrivere $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$. Infatti, nel far questo, passi continuamente da elementi di un insieme a quello dell'altro ed ***è facile confondersi e saltare degli elementi***, facendo degli errori. In più, per chi deve controllare il tuo lavoro, è molto più faticoso verificare se hai fatto bene, proprio perché il controllo procede saltellando da un'elencazione ad un'altra. Morale: se sei disposto a sbagliare, pur di fare un dispetto al Prof, riordina gli elementi! 

***Osserva:*** la rappresentazione per caratteristica di un'unione si può ***sempre*** scrivere in questo modo:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$.

Di sicuro, infatti, un elemento di $A \cup B$ stava in *A*, ***oppure*** stava in *B* (quel *oppure* ***NON*** va inteso nel senso che ***gli elementi che stavano sia in A che in B devono essere scartati!***). Allora…

***In pratica:*** per determinare l'unione di due insiemi rappresentati per caratteristica, il modo più semplice è di definire la regola come la disgiunzione delle regole degli insiemi di partenza. ***Cioè, basta riscrivere le regole dei due insiemi di partenza, con un 'oppure' nel mezzo.***

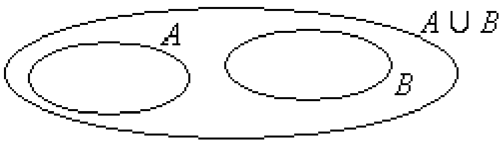
Esempio:
*A* = {*a* | *a* è una lettera della parola "sbuffo"}
*B* = {*b* | *b* è una lettera della parola "faraona"}
$A \cup B$= {*x* | *x* è una lettera della parola "sbuffo" ***oppure*** *x* è una lettera della parola "faraona"}

***Osserva***: potresti procedere anche esprimendo l'unione per elencazione, e poi cercare una parola formata da ***tutte*** le lettere presenti nell'unione (e nessun'altra). Tornando all'esempio qui sopra, siccome per elencazione $A \cup B$ = {s,b,u,f,o,a,r,n}, mi accorgo che quelle lettere sono tutte quelle della parola "sbruffona". Allora posso scrivere:

$A \cup B$ = {*x* | *x* è una lettera della parola "sbruffona")

Questa procedura ***è più difficile***, perché richiede di riorganizzare le lettere per identificare la nuova caratteristica, però è più "bella", nel senso che produce una regola più breve e dimostra una certa abilità. La prima procedura è sempre corretta e non richiede nessun ragionamento, perché si basa sulla sintassi, che vuol dire che funziona ***indipendentemente dal tipo di oggetti dei due insiemi di partenza***, per via ***del modo stesso in cui è fatta l'operazione di unione***.

***In pratica:*** per determinare l'unione di due insiemi rappresentati per diagramma, basta disegnare un ovale che racchiude tutti gli elementi di *A* e di *B*.




***Fai attenzione:*** l'unione è un'operazione sempre possibile, cioè si trova sempre l'insieme unione di due insiemi qualunque, perché si tratta solo di metterne insieme gli elementi.

***Fai attenzione:*** l'unione di due insiemi è grande ***almeno*** come il più grande dei due insiemi di partenza, cioè contiene un numero di elementi ***almeno uguale a quello dell'insieme più numeroso***. Se ci pensi, la cosa è ovvia. Se hai capito, pensa alle conseguenze che ne puoi trarre e dimmi: è possibile che l'unione di due insiemi sia uguale ad uno degli insiemi di partenza? Perché? Prova a decifrare la seguente frase in linguaggio simbolico, e dimmi se ha qualcosa a che fare con la mia domanda:

$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$

***Fai attenzione:*** l'unione di due insiemi può essere vuota ***solo se entrambi gli insiemi di partenza erano vuoti***.

- ***Intersezione:*** il risultato dell'intersezione fra i due insiemi $A$ e $B$, è un insieme che ha per elementi tutti quegli oggetti che sono ***sia elementi di A, sia elementi di B***. L'intersezione di $A$ e $B$ si rappresenta simbolicamente così: $A \cap B$.

  ***In pratica:*** per determinare l'intersezione di due insiemi rappresentati per elencazione, comincia a considerare il primo elemento del primo insieme e controlla se c'è nell'elenco del secondo insieme: se c'è, quell'elemento lo scrivi nell'intersezione, altrimenti passi direttamente a considerare l'elemento successivo (del primo insieme) e ripeti la stessa procedura finché non sono finiti.

  Esempio: dato $A = \{1,3,5,6\}$ e $B = \{1,2,4,5\}$, allora $A \cap B = \{1,5\}$

  ***Osserva:*** la rappresentazione per caratteristica di un'intersezione si può ***sempre*** scrivere in questo modo:

  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

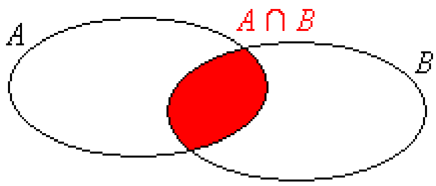
  Di sicuro, infatti, un elemento di $A \cap B$ stava in $A$ ***e anche*** in $B$. Allora…

  ***In pratica:*** per determinare l'intersezione di due insiemi rappresentati per caratteristica, il modo più semplice è di definire la regola come la congiunzione delle regole degli insiemi di partenza. ***Cioè, basta riscrivere le regole dei due insiemi di partenza, con un 'e' nel mezzo.***

  Esempio:
  $A = \{a \mid a$ è una lettera della parola "sbuffo"$\}$
  $B = \{b \mid b$ è una lettera della parola "faraona"$\}$
  $A \cap B = \{x \mid x$ è una lettera della parola "sbuffo" ***e*** $x$ è una lettera della parola "faraona"$\}$

  ***Osserva***: esattamente come per l'unione, puoi procedere anche esprimendo la intersezione per elencazione, e poi cercare una parola formata da ***tutte*** le lettere presenti nella intersezione (e nessun'altra). Siccome per elencazione $A \cap B = \{f,o\}$, mi accorgo che quelle lettere sono tutte quelle della parola… ooopss, non la trovo! Beh, l'avevo detto che era più difficile, no? 

  ***In pratica:*** per determinare l'intersezione di due insiemi rappresentati per diagramma, basta considerare la regione racchiusa da entrambi gli ovali.

  ***Fai attenzione:*** l'intersezione è un'operazione sempre possibile, cioè si trova sempre l'insieme intersezione di due insiemi qualunque, perché si tratta solo di scegliere alcuni elementi fra quelli che ci sono già.

  ***Fai attenzione: l'intersezione*** di due insiemi è grande al più come il più piccolo dei due insiemi di partenza, cioè ***non può contenere più elementi dell'insieme meno numeroso***. Se ci pensi, la cosa è ovvia. Se hai capito, pensa alle conseguenze che ne puoi trarre e dimmi: è possibile che l'intersezione di due insiemi sia uguale ad uno degli insiemi di partenza? Perché? Prova a decifrare la seguente frase in linguaggio simbolico, e dimmi se ha qualcosa a che fare con la mia domanda:

  $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$

***Fai attenzione:*** l'intersezione di due insiemi può essere vuota ***anche se nessuno dei due insiemi di partenza era vuoto***. Se due insiemi hanno intersezione vuota, si dicono ***disgiunti*** (perché la loro rappresentazione grafica è fatta di due ovali che non si sovrappongono).

- ***Differenza:*** il risultato della differenza di due insiemi *A* e *B*, è un insieme che ha per elementi tutti gli elementi del primo insieme, meno quelli che ci sono anche nel secondo. La differenza di *A* e *B* si rappresenta simbolicamente così: $A-B$. Osserva che la differenza fra insiemi assomiglia alla sottrazione fra numeri: il risultato è un solo "mucchio", che contiene gli oggetti del primo "mucchio" meno gli oggetti del secondo "mucchio".

  ***Fai attenzione***: gli elementi di *B* ***non compaiono mai nella differenza***. La differenza contiene tutti gli elementi di *A*, meno quelli che sono anche in *B*; quindi quelli che rimangono sono comunque elementi solo di *A*. Gli elementi di *B* che non sono in *A*, ***non si prendono in considerazione in nessuna maniera***, in particolare, ***non vanno aggiunti nella differenza.*** Se ci pensi bene, che senso avrebbe *aggiungere* degli elementi di *B*, visto che *sto facendo una sottrazione*?

  ***In pratica:*** per determinare la differenza di due insiemi rappresentati per elencazione, scrivi tutti gli elementi del primo insieme, ma ***salta quelli che sono anche nell'elenco del secondo*** (un modo più sicuro, se hai paura di confonderti, è di scrivere tutti gli elementi di *A* e ***poi cancellare*** quelli che ci sono anche in *B*).

  Esempio: dato *A* = {1,3,5,6} e *B* = {1,2,4,5}, allora $A-B$= {3,6}

  ***Osserva***: esattamente come la sottrazione fra numeri, anche l'operazione differenza non è commutativa, cioè $A-B \neq B-A$. Nell'esempio di prima, $B-A$= {2,4}

  ***Osserva:*** la rappresentazione per caratteristica di una differenza si può scrivere in questo modo:

  $A-B=\{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

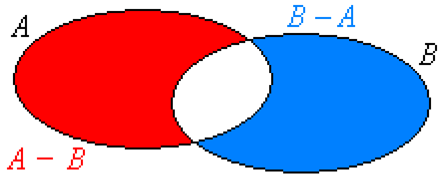
  Di sicuro, infatti, un elemento di $A-B$ stava in *A* ***e non*** stava in *B* (se no lo avremmo cancellato dall'elenco di $A-B$). Allora…

  ***In pratica:*** per determinare la differenza di due insiemi rappresentati per caratteristica, il modo più semplice è di definire la regola come la congiunzione delle regole degli insiemi di partenza, ma ricordandosi di negare la seconda. ***Cioè, basta riscrivere le regole dei due insiemi di partenza, con un 'e non' nel mezzo.***

  Esempio:
  *A* = {*a* | *a* è una lettera della parola "sbuffo"}
  *B* = {*b* | *b* è una lettera della parola "faraona"}
  $A-B$= {*x* | *x* è una lettera della parola "sbuffo" ***e*** *x* ***non*** è una lettera della parola "faraona"}

  ***Osserva***: potresti procedere anche esprimendo la differenza per elencazione, e poi cercare una parola formata da ***tutte*** le lettere presenti nella differenza (e nessun'altra). Tornando all'esempio qui sopra, siccome per elencazione $A-B$ = {s,b,u}, mi accorgo che quelle lettere sono tutte quelle della parola "bus" (abbreviazione di autobus). Allora posso scrivere:
  $A-B$ = {*x* | *x* è una lettera della parola "bus")

  ***In pratica:*** per determinare la differenza di due insiemi rappresentati per diagramma, basta considerare l'ovale del primo insieme, tranne la parte in cui si sovrappone al secondo, cioè ***tranne la sua intersezione col secondo***.



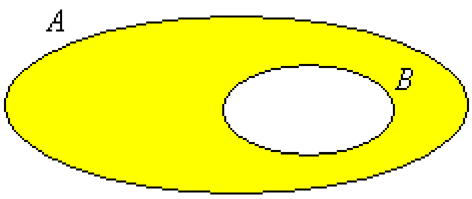

***Fai attenzione:*** la differenza è un'operazione sempre possibile, cioè si trova sempre l'insieme differenza di due insiemi qualunque, perché si tratta solo di tenere alcuni degli elementi del primo insieme.

***Fai attenzione:*** la differenza di due insiemi è grande ***al più*** come il primo insieme, cioè contiene un numero di elementi ***al più uguale a quello del primo insieme***. Se ci pensi, la cosa è ovvia. Se hai capito, pensa alle conseguenze che ne puoi trarre e dimmi: è possibile che la differenza di due insiemi sia uguale ad uno degli insiemi di partenza? Perché? Prova a decifrare la seguente frase in linguaggio simbolico, e dimmi se ha qualcosa a che fare con la mia domanda:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A$$

***Fai attenzione:*** la differenza di due insiemi può essere vuota ***solo se l'insieme minuendo è un sottoinsieme dell'insieme sottraendo*** (infatti in questo caso tutti gli elementi del primo insieme lo sono anche del secondo e saranno tutti cancellati dall'elenco). ***Guarda bene***: questo ***non ci dice niente a proposito del fatto che i due insiemi siano vuoti o non vuoti***, basta solo che uno sia sottoinsieme dell'altro e la differenza sarà vuota.

Un caso particolare di differenza è ***l'insieme complementare di B a formare A.*** Questo insieme si indica così: $C_A B$. L'insieme complementare di $B$ a formare $A$ non è altro che $A - B$ nel caso particolare in cui $B \subset A$. Se $B \not\subset A$, allora l'insieme $C_A B$ ***non esiste***! Questo insieme si chiama così perché ***è composto da tutti quegli elementi che mancano a B per essere uguale ad A***. Graficamente, la rappresentazione $C_A B$ è la parte colorata in giallo.




***Fai attenzione***: sentirai parlare di nuovo di complementarità quando faremo le frazioni, quindi cerca di ricordare bene cosa vuol dire.

- ***Prodotto Cartesiano:*** il risultato del prodotto cartesiano di due insiemi $A$ e $B$, è un insieme che ***ha per elementi tutte le coppie che si possono formare prendendo (nell'ordine) un elemento del primo insieme ed un elemento del secondo insieme***. Il prodotto cartesiano di $A$ e $B$ si rappresenta simbolicamente così: $A \times B$. Osserva che il prodotto cartesiano fra insiemi ***non*** assomiglia al prodotto fra numeri: in particolare, il prodotto cartesiano ***non è commutativo***. Perché allora si chiama così? Dipende dal fatto che il numero di elementi del prodotto cartesiano è uguale al prodotto del numero di elementi degli insiemi di partenza. Infatti, siccome per ognuno degli elementi del primo insieme si può formare una coppia con ognuno di quelli del secondo, il numero di coppie che si formeranno sarà proprio il prodotto dei due numeri di elementi.

***In pratica:*** per determinare il prodotto cartesiano di due insiemi rappresentati per elencazione, prendi il primo elemento del primo insieme e costruisci una coppia col primo elemento del secondo, poi un'altra col secondo elemento del secondo, e così via fino all'ultimo elemento del secondo. A questo punto, prendi il secondo elemento del primo insieme e ripeti la procedura con tutti quelli del secondo. Vai avanti fino all'ultimo elemento del primo insieme.

Esempio: dato $A$={1,3,5} e $B$={2;6}, allora $A \times B$={ (1;2), (1; 6), (3;2), (3; 6), (5;2), (5;6) },
mentre $B \times A$={ (2; 1), (2; 3), (2; 5), (6; 1), (6; 3), (6; 5) }

***Fai attenzione:*** il prodotto cartesiano di due insiemi può essere vuoto ***solo se almeno uno degli insiemi di partenza era vuoto.***

***Fai molta attenzione:*** non lavoreremo mai col prodotto cartesiano di per sé, ma ricordati che in un prodotto cartesiano, ***l'ordine in cui si prendono gli elementi per formare le coppie è cruciale***. La coppia (1;2) ***è completamente diversa*** dalla coppia (2;1). Vedremo una applicazione del prodotto cartesiano quando faremo i piani cartesiani, in cui la coppia (1;2) identifica un punto diverso dalla coppia (2;1). ***I piani cartesiani sono una delle cose più importanti che si fanno alle medie***, perché su di essi si basa gran parte della matematica che si fa alle superiori, e anche della fisica e di altre scienze.

***Puoi aggiungere le tue osservazioni ed i tuoi appunti qui sotto***